Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

3 de Noviembre de 2017. Fernando Mayoral.
Desigualdades (y Polinomios y otras funciones) (I).

1.-Algunas desigualdades básicas.

1) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

2) (Desigualdad triangular) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

3) Medias: aritmética (A), geométrica (G), armónica (H) y cuadrática (Q): Si $a, b > 0$,

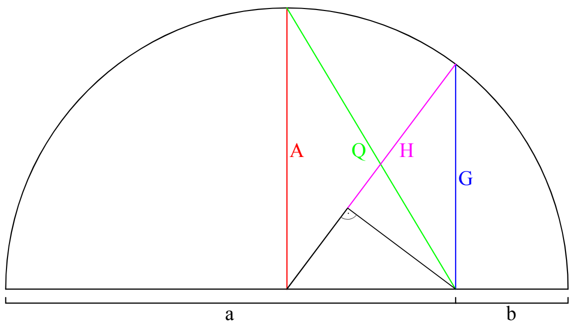
$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Entonces

$$\boxed{\min\{a,b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a,b\}}$$

y las igualdades se cumplen si y sólo si $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la visualización adjunta. Dicha visualizacin también muestra cuánto se parecen y cuánto se diferencian en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b.



Cada una de las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre si y equvalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \;\equiv\; 2ab \leq a^2 + b^2$ (y que la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a = b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectágulo de lados a y b (perímetro $= 2(a+b)$) y $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado $= \frac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \leq A \;\equiv\; \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

  nos dice que el área del rectágulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a+b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área $= ab$) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado $= \sqrt{ab}$) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \leq A \;\equiv\; \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \;\equiv\; 4\sqrt{ab} \leq 2(a+b),$$

nos dice que el perímetro del del rectángulo es menor o igual que la cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

4) (Reordenamiento) Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces $\boxed{ay + bx \leq ax + by.}$

Ejercicio 1.

a) Demuestra la desigualdad triangular y que $|x-y| \geq ||x| - |y||$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Interpreta geométricamente la desigualdad en términos de áreas. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

c) Demuestra e interpreta la desigualdad del reordenamiento.

Ejercicio 2. *(Completando cuadrados)* Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

b) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

c) Si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Demuestra que la suma $x + y$ con $xy = 1, x > 0$, es mínima cuando $x = y = 1$. Interpreta geométricamente el resultado.

d) Si $0 < x < 2$ entonces $x(2-x) \leq 1$. Demuestra que el producto xy con $x + y = 2, x, y > 0$, es máximo cuando $x = y = 1$. Intepreta geométricamente el resultado.

Ejercicio 3. Demuestra las siguientes desigualdades:

a) Si $0 \leq x \leq y \leq 1$ entonces $0 \leq xy^2 - x^2y \leq \frac{1}{4}$.

b) Si $x, y > 0$ entonces $\sqrt{\dfrac{x^2}{y}} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Ejercicio 4. *(OME-1984)* Dados dos números reales positivos p, q tales que $p + q = 1$, y sabiendo que todo par de números reales x, y cumple $(x-y)^2 \geq 0$, se pide demostrar

a) si $x, y > 0$, entonces $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

c) si $p, q > 0$ y $p + q = 1$, entonces $\left(p + \frac{1}{p}\right)^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$.

Ejercicio 5. *(OME-1978)* Se dan los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demostrar, sin necesidad de calcular derivadas que el valor de X que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

2.- La desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para dos conjuntos de n números reales, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se verifica que

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + \cdots + b_n^2\right).$$

La igualdad se cumple si y sólo si las $n-$uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son una múltiplo de la otra.

Podemos suponer que alguno de los $a_k \neq 0$. Puede demostrarse la desigualdad de Cauchy-Schwarz estudiando la gráfica del polinomio de segundo grado dado por

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2.$$

Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq p(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right) x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

la gráfica/parábola $y = p(x) = Ax^2 + Bx + C$ esá por encima del eje OX, o es tangente a él. Por tanto, el discriminante

$$\Delta = B^2 - 4AC \leq 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

El caso $B^2 = 4AC$, que se corresponde con que la parábola sea tangente a OX, es equivalente a que se verifique la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se da cuando $p(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_k = -x_0 a_k, \ \ k = 1, \ldots, n,$$

o lo que es lo mismo $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es un múltiplo de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ejercicio 6. *(OME-1971)* Si $0 < p, 0 < q$ y $p + q < 1$, demostrar que $(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2$.

Ejercicio 7. Demostrar que si a, b, x, y son números reales y $a, b > 0$ entonces

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} \leq \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

Ejercicio 8. *(OME, 1980)* Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

¿Cuándo es válida la igualdad?

Ejercicio 9. Demuestra que

$$\frac{a^2}{2a^2+bc} + \frac{b^2}{2b^2+ca} + \frac{c^2}{2c^2+ab} \leq 1$$

para todos los números reales positivos a, b, c.

Ejercicio 10. Deducir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz la **desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática**: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos se verifica que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Ejercicio 11. Dado un número natural $n \geq 2$ considere todos los números reales $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$ tales que

$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 1.$$

Hallar el mayor valor posible y el menor valor posible de

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

Antes de considerar el caso general $n \geq 2$, considere el caso $n = 2$ dando una interpretación geométrica.

3.- Desigualdades entre Medias.

Ya hemos considerado antes, e interpretado, las medias de dos números reales positivos. Dados n números reales positios $a_1, a_2, \dots, a_n$ suelen considerarse las siguientes medias:

- **Media aritmética.** $A = \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.
- **Media geométrica.** $G = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$.
- **Media armónica.** $H = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.
- **Media cuadrática.** $Q = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$.

La misma desigualdades que vimos para las medias entre dos números se tienen en el caso de n números (reales positivos):

1) $\min_k\{a_k\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max_k\{a_k\}$,

$$\min_k\{a_k\} \leq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \leq \max_k\{a_k\}.$$

2) Las igualdades se cumplen si y sólo si $a_1 = \cdots = a_n$.

Ejercicio 12. *(OME-1975)* Probar que si el producto de n números reales y positivos es igual a 1, su suma es mayor o igual que n.

Ejercicio 13. Sean $x, y, z > 0$ tales que $x + y + z = 1$. Demuestra que $xy + yz + zx \leq \dfrac{1}{3}$. ¿Qué desigualdad se deduce sin la restricción $x + y + z = 1$?

4.- La desigualdad del reordenamiento.

A partir de la desigualdad del reordenamiento para dos sumandos, que ya hemos considerado, se puede justificar que si se tienen dos $n-$uplas ordenadas:

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$$
$$b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$$

entonces para cualquier permutacón/reordenación $(c_1, \ldots, c_n)$ de $(b_1, \ldots, b_n)$ se tiene que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \geq a_1b_n + \cdots + a_nb_1$$

Estas desigualdades se pueden interpretar en términos coloquiales de la siguiente forma: Se tienen billetes con distintos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y de cada tipo de billete se puede coger una cierta cantidad de entre cantidades prefijadas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si consideramos los valores ordenados de los billetes y de las cantidades, ¿Cuál es la forma de obtener la mayor cantidad posible cogiendo a_1 billetes de un tipo, a_2 billetes de otro tipo, y así sucesivamente hasta agotar las cantidades? El mayor valor total posible se obtendrá tomando el mayor número posible a_n de billetes con el mayor valor posible x_n, y con lo que vaya quedando ir haciendo lo mismo. El menor valor total posible se obtendrá tomando el mayor número posible de billetes lo más pequeños posible, y continuar con el mismo esquema hasta agotar las cantidades a tomar.

Ejercicio 14. Halla el mínimo de $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} + \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ejercicio 15. *(IMO-1978)*
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números naturales distintos. Demuestra que

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Ejercicio 16.
Sean $a_k > 0, k = 1, \ldots, n$ y $s = a_1 + \cdots + a_n$. Probar que

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Ejercicio 17. Sean $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ números reales no-negativos menores o iguales que 1. Halla el mayor valor posible de

$$x_1(1 - x_2) + x_2(1 - x_3) + \cdots + x_{100}(1 - x_1)$$

Ejercicio 18. Desigualdad de Chebyshev, para medias.
Sean $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos conjuntos de n números reales. Demuestra que si están ordenados de la misma forma (ambos en forma creciente o ambos en forma decreciente), entonces

$$\frac{a_1b_n + \cdots + a_nb_1}{n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1b_1 + \cdots + a_nb_n}{n}.$$

. . . .

Son consecuencia casi directa de las desigualdades de reordenamiento. Para obtener la segunda desigualdad basta tener en cuenta que puesto que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ están ordenados igual se tiene

$$\begin{array}{rcl}
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & = & a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_2 + a_2b_3 + \cdots + a_nb_1 \\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_3 + a_2b_4 + \cdots + a_nb_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
a_1b_1 + \cdots + a_nb_n & \geq & a_1b_n + a_2b_1 + \cdots + a_nb_{n-1}
\end{array}$$

Sumando estas desigualdades miembro a miembro se obtiene la segunda desigualdad del enunciado. La primera puede obtenerse de forma análoga.

Ejercicio 19. Sean a, b, c números reales positivos. Probar que $a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.
